

جبر كسري المتتالية للحل :

نعمية :
ليكن A جبر كسري ضمن الحلقة التبادلية والواحدة R المميز

$$D^0 A = A$$

$$D^1 = [A, A] = [D^0 A, D^0 A]$$

$$D^2 A = [D^1 A, D^1 A] = [[A, A], [A, A]]$$

$$D^3 A = [D^2 A, D^2 A]$$

⋮

$$\forall k \in \mathbb{N}^+ : D^k A = [D^{k-1} A, D^{k-1} A]$$

⋮

نعمية :
ليكن A جبر كسري ضمن الحلقة R المميز $n \in \mathbb{N}$ حيث

$$* D^n A \subseteq D^{n-1} A$$

المبرهن : بالاشتراك على D :

لنجد ان $n=1$:

$$D^1 A = [A, A] \subseteq A = D^0 A$$

لنجد ان $n=2$:

$$D^2 A = [D^1 A, D^1 A] \subseteq [A, A] = D^1 A$$

بنظرية القسمة + صحة لاجل k نثبت ان

$$D^k A \subseteq D^{k-1} A$$

$$D^{k+1} A = [D^k A, D^k A] \subseteq [D^{k-1} A, D^{k-1} A] = D^k A$$

وهذا القسمة صحة لاجل $n \in \mathbb{N}$

نعمية :

ليكن A جبر كسري ضمن الحلقة R المميز

$$(1) \quad \dots \subseteq D^3 A \subseteq D^2 A \subseteq D^1 A \subseteq D^0 A \subseteq A$$

$$(2) \quad A \supseteq D^n A \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{حيث} \quad D^n A \neq \emptyset$$

متتالية متناهية

- (3) إذا كانت $n \in N$ فإن $D^n A$ هي مجموعة
 (4) إذا كانت $n \in N$ فإن $D^{n+1} A$ هي مجموعة
 (5) إذا كانت $n \in N$ فإن $D^{n+1} A$ هي مجموعة جزئية من $D^n A$
 (6) إذا كانت $n \in N$ فإن $D^n A$ هي مجموعة جزئية من A

تعريف:

نقول عن مجموعة A من R ، كلية R ، أنه قابل للحد إذا وجد $n \in N$ بحيث

$$D^n A = 0$$

منه A هي مجموعة جزئية من R قابل للحد

$$D^n A = 0 \quad D^{n+1} A \neq 0$$

بالحل قابلية الحد

وتقول عن المتك A في R أنه قابل للحد إذا وجد $n \in N$ بحيث يكون $D^n I = 0$

وسنجد أكبر n بحيث قابل للحد في A نسميها $\text{Rad } A$

مبرهنة:

إذا كانت A مجموعة من R قابل للحد

البرهان:

ليكن A مجموعة من R قابل للحد F ولنفرض أن $\dim A = 2$ فإن A هي مجموعة جزئية

من R قابل للحد F من R لنفرض أن $e_1, e_2 \in F$ وهما أساسا لمجموعة A من R

عن A أي $a \in A$ فإن a يكتب بصورة $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$

$$a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ واضح أن $D^n A \neq 0$ لجميع n

بالحل القوي:

$$[e_1, e_2] = c_1 e_1 + c_2 e_2 \quad c_1, c_2 \in F$$

دالة $Z \in D^n A = [A, A]$ هي

$$Z = [x, y] \quad x, y \in A$$

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 \quad \alpha_1, \alpha_2 \in F$$

$$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 \quad \beta_1, \beta_2 \in F$$

$$Z = [x, y] = [\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2, \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2]$$

$$= \alpha_1 \beta_1 [e_1, e_1] + \alpha_1 \beta_2 [e_1, e_2] + \alpha_2 \beta_1 [e_2, e_1] + \alpha_2 \beta_2 [e_2, e_2]$$

$$Z = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) [e_1, e_2] = \underbrace{(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)}_{\in F} [e_1, e_2] = \alpha [e_1, e_2]$$

حيث $\alpha = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) [e_1, e_2] \in F$ جزئياً بين A

$$DA = \{ \alpha [e_1, e_2] : \alpha \in F \} \neq 0$$

والذي يقع في جزئي A هو 0

لكن $Z' = [x', y'] : x', y' \in DA$ حيث $Z' \in D^2 A = [D^1 A, D^1 A]$

$$x' = \alpha e_1, \quad y' = \beta e_1, \quad \alpha, \beta \in F$$

$$Z' = [x', y'] = [\alpha e_1, \beta e_1] = \alpha \beta [e_1, e_1] = 0$$

وهذا يعني $D^2 A = 0$ بالتي هي حقا A قابلية

انتهى الشرح